

УДК 511.527

Перфильев Михаил Сергеевич,

PhD в области математики,

Доктор Международной Академии Естествознания,

Доктор Российской академии образования и технологий

РФ, г. Иркутск

E-mail: perfmihserg18011985@mail.ru

Perfileev Michael Sergeevich,

PhD in mathematics,

Doctor of International Academy of Natural History,

Doctor of the Russian Academy of Education and Technology

Russia, Irkutsk

## **Задача Брокара в контексте законов распределения простых чисел**

### **Аннотация**

Данная работа относится к области теории чисел и посвящена исследованию одной из нерешенных проблем математики - диофантову уравнению  $n! + 1 = m^2$ , известному как задача Брокара. При помощи закономерностей в распределении простых чисел и теоремы Харди-Рамануджана показано, что это уравнение не имеет иных решений, кроме трех пар чисел, называемых числами Брауна. Также в работе проведен анализ суммы бесконечного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!+1}}$ .

**Ключевые слова:** теорема о распределении простых чисел, интервалы между простыми числами, задача Брокара, числа Брауна, диофантово уравнение, факториал, теорема Харди-Рамануджана

**Keywords:** prime number theorem, prime gaps, Brocard's problem, Brown numbers, diophantine equation, factorial, Hardy-Ramanujan theorem

## Введение

Согласно теореме о распределении простых чисел количество простых чисел  $\pi(n)$  на отрезке  $[1;n]$  с увеличением  $n$  примерно растет как  $\frac{n}{\ln(n)}$  [1]:

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\ln(n)} \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ (что эквивалентно } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n)}{n/\ln(n)} = 1 \text{)}. \quad (1)$$

Весомый результат в области теории чисел получил Пафнутий Львович Чебышев в 1850 году, доказав, что для достаточно больших значений  $x$  справедливо двойное неравенство [2]  $0,921 \frac{x}{\ln(x)} < \pi(x) < 1,106 \frac{x}{\ln(x)}$ . Достаточно

точно распределение простых чисел можно описать при помощи интегрального лорарифма  $Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln(t)}$ , т. е. количество простых чисел, не превосходящих  $x$ ,

хорошо приближается функцией  $Li(x)$  [3]:  $\frac{\pi(x)}{Li(x)} \rightarrow 1$  при  $x \rightarrow +\infty$  (результат,

полученный Чебышевым в 1848 году). Если гипотеза Римана [4] верна, то справедливо утверждение  $|Li(x) - \pi(x)| \leq c\sqrt{x}\ln(x)$ , где  $c$  - некоторая константа (Wagon, 1991 [5]). В 2016 году австралийский математик Тимоти

Труджиан получил оценку  $|\pi(x) - li(x)| \leq 0,2795 \frac{x}{(\ln(x))^{3/4}} \exp\left(-\sqrt{\frac{\ln(x)}{6,455}}\right)$  для  $x \geq$

229 [6], где  $li(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln(t)}$ . В работе [7] при

помощи третьей теоремы Мертенса [8], [9] получены формулы для оценки количества простых чисел на отрезке  $[1;n]$

$\pi(n) \sim \frac{n}{n - \frac{n}{\sqrt{n}}}$  при  $n \rightarrow \infty$ ;  $\pi(n) = \int_2^n \frac{dx}{x - x^{1-1/x}}$ ;  $\pi(n) = \int_2^n \frac{dx}{x^{1+1/x-x}}$ , из которых следует,

что среднее значение интервалов между простыми числами имеет порядок

$p_{n+1} - p_n \approx p_n - p_n^{1-1/p_n} \approx p_n^{1+1/p_n} - p_n \approx \ln(p_n)$ , где  $p_n$  -  $n$ -ое по счету простое

число (речь идет именно о средней длине, фактическая длина интервала может быть больше или меньше), а вероятность того, что наугад выбранное натуральное число из отрезка  $[1;n]$  окажется простым, прилизительно равна

$$probability \approx \frac{1}{n - n^{1-1/n}} \approx \frac{1}{n^{1+1/n} - n} \approx \frac{1}{\ln(n)}.$$

Изучение распределения простых чисел чрезвычайно важно для определения промежутков между простыми числами. На сегодняшний день существуют недоказанные и непровергнутые гипотезы о промежутках между простыми

числами (гипотеза Оппермана, гипотеза Крамера, гипотеза Андрицы, гипотеза Брокара, гипотеза Лежандра, гипотеза Фирузбэخت и др.). Помимо общеизвестного постулата Бертрана, согласно которому для любого натурального  $n \geq 2$  в интервале  $(n; 2n)$  найдется простое число  $p$  [10], имеются гораздо более точные результаты. Так, в 1952 году японский математик Дзицуру Нагура доказал, что для  $n \geq 25$  всегда найдется простое число между  $n$  и  $1,2n$  [11]; в 1976 году американский математик Лоуэлл Шенфельд показал, что для  $n \geq 2010760$  имеется простое число в интервале  $(n; n(1+1/16597))$  [12]; в 2016 году французский математик Пьер Дюсар показал, что на промежутке

$$(x; x \left(1 + \frac{1}{(\ln(x))^3}\right)] \text{ при } x \geq 89693 \quad (2)$$

существует хотя бы одно простое число [13].

Согласно австралийскому математику Адриану Уильяму Дудеку, в предположении верности гипотезы Римана существует простое число в промежутке  $(x - \frac{4}{\pi} \sqrt{x} \ln(x); x]$  для  $x \geq 2$  [14]. Бейкер, Харман и Пинц доказали, что при больших значениях  $x$  на отрезке  $[x - x^{0,525}; x]$  имеется простое число [15]. Также существуют следующие оценки для функции  $\pi(x)$  и  $n$ -го простого числа  $p_n$ :  $\frac{x}{\ln(x)} < \pi(x) < 1,25506 \cdot \frac{x}{\ln(x)}$ , причем левое неравенство выполняется при  $x \geq 17$ , а правое при  $x > 1$  [16];  $n(\ln(n) + \ln(\ln(n)) - 1) < p_n < n(\ln(n) + \ln(\ln(n)))$ ,

причем левое неравенство выполняется при  $n \geq 2$  [17], а правое при  $n \geq 6$  [18].

Интегральный логарифм не выражается через элементарные функции:

$$\int \frac{dx}{\ln(x)} = \ln|\ln(x)| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln(x))^n}{n \cdot n!} \quad [19];$$

Скьюза — наименьшее натуральное число  $x$ , такое что начиная с него нарушается неравенство  $\pi(x) < Li(x)$  [20], ввиду чего проблемы в изучении распределения простых чисел являются весьма сложными.

Одной из нерешенных на сегодняшний день задач теории чисел является

решение диофантова уравнения

$$n! + 1 = m^2, \quad (3)$$

где  $n!$  является факториалом натурального числа  $n$  [21].

Впервые в истории науки данная задача была поставлена французским математиком Анри Брокар в 1876 (в честь которого получила свое название), а затем (на тридцать семь лет позднее) индийским математиком Сринивасой Рамануджаном. На сегодняшний день известны только три пары чисел  $(n;m)$ , являющиеся решениями уравнения (3):  $(4;5)$ ;  $(5;11)$ ;  $(7;71)$ ; они называются числами Брауна. Венгерский математик Пауль Эрдеш предположил, что иных решений не существует [22]. В ходе вычислений для  $n$  до  $10^9$  (выполнены Berndt и Galway) других решений задачи Брокара не было найдено [23], что является аргументом в пользу отсутствия иных решений, но не доказательством этого факта. Существуют обобщения задачи Брокара. Если абс-гипотеза [24] верна, то уравнение  $x! + A = y^2$  имеет конечное число решений для любого числа  $A$  (Dabrowski [25]). Также в предположении верности абс-гипотезы уравнение  $n! = P(x)$  имеет конечное число решений, где  $P(x)$  – многочлен с целыми коэффициентами степени не ниже второй (Лука [26]).

В работе [27] приведены некоторые размышления о задаче Брокара (в том числе при помощи представления  $\cos(\pi\sqrt{n!+1})$  как бесконечного произведения получена равносильная постановка задачи Брокара  $\frac{1}{4n!+3} = \prod_{k=2}^{\infty} \left(1 - \frac{4(n!+1)}{(2k-1)^2}\right)$ ). За основу этой работы взята задача с Московской математической олимпиады 1941 года, в которой было необходимо доказать, что сумма произведения четырех последовательных натуральных чисел и единицы является полным квадратом [28] (решение этой задачи можно свести к тождеству  $(l-1)l(l+1)(l+2)+1 = (l(l+1)-1)^2$ , где  $l$  – натуральное число). Тогда сумму произведения четырех последовательных натуральных чисел и единицы можно записать как  $(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)+1 = m^2$ , где  $k$  – целое неотрицательное число, т. е. в уравнении (3)  $n!$  должен иметь вид  $n! = (k+1)(k+2)(k+3)(k+4)$ , что равносильно  $n! = (k+1)(k+4)(k+2)(k+3) = (k^2+5k+4)(k^2+5k+6)$  и

$n! = k^4 + 10k^3 + 35k^2 + 50k + 24$ . Заметим, что множители  $k^2 + 5k + 4$  и  $k^2 + 5k + 6$  отличаются на 2, а из уравнения (3) следует, что

$$n! = (m - 1)(m + 1), \quad (4)$$

т. е.  $n!$  представлен в виде произведения множителей  $m - 1$  и  $m + 1$ , которые также отличаются на 2.

При  $k=0$  получим  $n!=24$ , откуда  $n=4$ ; при  $k=1$  получим  $n!=120$ , откуда  $n=5$ ; при  $k=2$ ;  $k=3$ ;  $k=4$ ;  $k=5$  полученные значения не являются факториалами натуральных чисел; при  $k=6$  получим  $n!=5040$ , откуда  $n=7$ . Таким образом, при значениях  $k=0$ ;  $k=1$ ;  $k=6$  получили значения  $n=4$ ;  $n=5$ ;  $n=7$  соответственно, являющиеся решениями задачи Брокара.

Приведем другие рассуждения касаясь уравнения (3). При  $n \geq 10$  его левая часть заканчивается цифрами 01, так как  $n!$  заканчивается цифрами 00. Значит  $m^2$  также должно заканчиваться на 01, поэтому  $m$  должно иметь вид  $m = 100k + 1$ , где  $k$  – целое число,  $k \geq 1$  (заметим, что  $m$  не может иметь вид  $m = 100k + 9$ , т. к. в этом случае  $m^2$  будет заканчиваться на 81). Тогда уравнение (3) будет записано в форме  $n! + 1 = (100k + 1)^2$ , что равносильно виду

$n! = 10000k^2 + 200k = 4 \cdot 50k(50k + 1)$ . Множители  $50k$  и  $50k+1$  являются последовательными числами, а два последовательных натуральных числа всегда взаимно просты.

Фигурными числами называют числа, связанные с геометрическими образами, причем многие задачи из области теории чисел можно сформулировать в терминах фигурных чисел [29]. Треугольными числами называют числа, которые являются таким количеством точек на плоскости, что их можно расположить в форме правильного треугольника. Последовательность треугольных чисел 1,3,6,10,15,21,28,36,45,55 ... [30] бесконечна, а общая формула  $n$ -го по порядку треугольного числа  $T_n = \frac{1}{2}n(n + 1)$ , где  $n=1;2;3...$  [31]. Записав уравнение  $n! = 4 \cdot 50k(50k + 1)$  в виде  $n! = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 50k(50k + 1)$ , получим формулировку задачи Брокара в терминах треугольных чисел:  $n! = 8T_{50k}$ .

Цель данной работы - при помощи положений теории чисел доказать, что

задача Брокера имеет только три пары решений.

## Задача Брокера и распределение простых чисел

Исследуем свойство значений  $n!$  при  $n > 10$ . Разобьем множество натуральных чисел от 1 до  $n$  включая на два непересекающихся подмножества  $A$  и  $B$ , произведения чисел в которых равны  $P_A$  и  $P_B$  соответственно. Разница между произведениями  $P_A$  и  $P_B$  будет минимальной в том случае, когда их значения будут как можно ближе к квадратному корню из факториала от  $n$ :

$$P_A \approx \sqrt{n!}; P_B \approx \sqrt{n!}, \quad (5)$$

где  $P_A \cdot P_B = n!$ , что тривиально.

Модуль разности  $d$  между произведениями  $P_A$  и  $P_B$  равен

$$d = |P_A - P_B| = \left| P_A - \frac{n!}{P_A} \right| = \frac{|P_A^2 - n!|}{P_A}. \quad (6)$$

Согласно постулату Бертрана  $n!$  будет обязательно содержать уникальное простое число  $p$  из диапазона  $(n/2; n]$ , которое будет входить в разложение факториала на множители в первой степени (что также следует из формулы  $n! = \prod_p p^{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor + \lfloor \frac{n}{p^2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{p^3} \rfloor + \dots}$ , где произведение берется по всем простым числам  $p$ , не превосходящим  $n$  [32]). А согласно результату (2) количество уникальных простых множителей при больших значениях  $n$  будет гораздо больше одного, поэтому  $n!$  при больших значениях  $n$  будет далек от полного квадрата, в связи с чем модуль разности  $d$  между произведениями  $P_A$  и  $P_B$  при  $n > 10$  будет заведомо больше двух:

$$d = \frac{|P_A^2 - n!|}{P_A} > 2, \quad (7)$$

что исключает выполнение равенства (4).

Также в теории чисел предполагается, что между первыми  $n$  простыми числами имеется приблизительно  $2 \cdot \ln(n)$  максимальных интервалов [33], [34]. При больших промежутках между простыми числами невозможно сбалансировать произведения  $P_A$  и  $P_B$  так, чтобы разница между ними была небольшой.

Проиллюстрируем эти рассуждения для факториалов натуральных чисел от 1

до 24 включая:

$1! = 1 \cdot 1 \rightarrow d=0$ ;  $2! = 1 \cdot 2 \rightarrow d=1$ ;  $3! = 2 \cdot 3 \rightarrow d=1$ ;  $4! = 4 \cdot 6 \rightarrow d=2$ ;  $5! = 10 \cdot 12 \rightarrow d=2$ ;  $6! = 24 \cdot 30 \rightarrow d=6$ ;  $7! = 70 \cdot 72 \rightarrow d=2$ ;  $8! = 192 \cdot 210 \rightarrow d=18$ ;  $9! = 576 \cdot 630 \rightarrow d=54$ ;  
 $10! = 1890 \cdot 1920 \rightarrow d=30$  ;  $11! = 6300 \cdot 6336 \rightarrow d=36$ ;  $12! = 21600 \cdot 22176 \rightarrow d=576$ ;  
 $13! = 78848 \cdot 78975 \rightarrow d=127$ ;  $14! = 294840 \cdot 295680 \rightarrow d=840$ ;  
 $15! = 1143072 \cdot 1144000 \rightarrow d=928$ ;  
 $16! = 4572288 \cdot 4576000 \rightarrow d=3712$ ;  $17! = 18849600 \cdot 18869760 \rightarrow d=20160$ ;  
 $18! = 79968000 \cdot 80061696 \rightarrow d=93696$ ;  $19! = 348566400 \cdot 348986880 \rightarrow d=420480$ ;  
 $20! = 1559376000 \cdot 1560176640 \rightarrow d=800640$ ;  
 $21! = 7147140000 \cdot 7148445696 \rightarrow d=1305696$ ;  
 $22! = 33522128640 \cdot 33530112000 \rightarrow d=7983360$ ;  
 $23! = 160758097500 \cdot 160813154304 \rightarrow d=55056804$ ;  
 $24! = 787652812800 \cdot 787718131200 \rightarrow d=65318400$ .

Согласно численным результатам,  $d = |P_A - P_B|$  быстро растет.

Заметим, что малые значения разности  $d$  соответствуют факториалам, в состав которых в качестве множителей входят наименьшие простые числа-триплеты  $(2;3;5)$  и  $(3;5;7)$  [35], причем триплет  $(3;5;7)$  является единственной тройкой простых чисел-близнецов [36].

Приведем другие рассуждения. Согласно теореме Харди-Рамануджана [37], среднее значение количества простых делителей числа натурального числа  $n$

$w(n)$  оценивается как  $\ln(\ln(n))$ , а среднее отклонение как  $\sqrt{\ln(\ln(n))}$  :

$$|w(n) - \ln(\ln(n))| < \ln(\ln(n))^{0,5+\varepsilon}, \text{ где } \varepsilon > 0. \quad (8)$$

(обобщением этой теоремы является теорема Эрдеша-Каца, согласно которой

предельное распределение величины  $\frac{w(n) - \ln(\ln(n))}{\sqrt{\ln(\ln(n))}}$  является нормальным

распределением [38] : при  $a < b$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \left\{ n \leq x : a \leq \frac{w(n) - \ln(\ln(n))}{\sqrt{\ln(\ln(n))}} \leq b \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \quad ; \quad \text{такое нормальное}$$

распределение называют стандартным [39] ).

Заметим, что количество различных простых делителей факториала натурального числа  $n$  равно количеству простых чисел, которые не превышают  $n$ , то есть в соответствии с теоремой о распределении простых чисел приближенно равно

$$w(n!) \approx \frac{n}{\ln(n)}. \quad (9)$$

В соответствии с теоремой Харди-Рамануджана количество простых множителей в выражении  $(m-1)(m+1)$  приближенно равно

$$w(m^2 - 1) \approx \ln(\ln(m^2 - 1)). \quad (10)$$

Сравнивая выражения (9) и (10), получим

$$\frac{n}{\ln(n)} = \ln(\ln(m^2 - 1)), \quad (11)$$

откуда по определению натурального логарифма

$$\ln(m^2 - 1) = \exp(n/\ln(n));$$

$$m^2 - 1 = \exp(\exp(n/\ln(n))). \quad (12)$$

Тогда согласно (4) и (12)

$$n! = \exp(\exp(n/\ln(n))). \quad (13)$$

Для больших значений  $n$  это равенство заведомо не может быть достигнуто, так как его правая часть гораздо больше левой, что можно заметить методом подстановки значений  $n$  либо анализом стремительно растущей функции

$$f(n) = \exp(\exp(n/\ln(n))) - \sqrt{2\pi n} \cdot (n/e)^n, \quad (14)$$

(которая получена с использованием формулы Муавра-Стирлинга для оценки факториалов больших чисел  $n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot (n/e)^n$  [40]). Отсюда также следует, что уравнение  $x! + A = y^2$  имеет конечное число решений при фиксированном значении  $A$ .

Аналогично можно показать, что только числа 1; 6 и 120 являются одновременно треугольными и факториалами (что равносильно решению диофантова уравнения  $8n! + 1 = m^2$  в натуральных числах).

В дополнение к работе рассмотрим сумму бесконечного ряда  $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!+1}}$ .

Согласно признаку сравнения [41] (например, с рядом обратных квадратов

$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}$  [42] ), этот ряд сходится; его сумма равна

$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!+1}} = 2,7191500853922395... \approx e + 0.0008682569331943... ,$

где  $e$  – число Эйлера [43].

## Заключение

Таким образом, в данной работе при помощи закономерностей в распределении простых чисел и теоремы Харди-Рамануджана предпринята попытка доказать, что диофантово уравнение  $n! + 1 = m^2$  (задача Брокара) имеет только три пары решений (4;5); (5;11) и (7;71). Также путем компьютерных вычислений найдена сумма бесконечного ряда  $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!+1}}$ .

## Список литературы

1. <https://mathworld.wolfram.com/PrimeNumberTheorem.html>
2. Бухштаб А.А. Теория чисел. Москва: издательство «ПРОСВЕЩЕНИЕ», 1966, стр. 333-334.
3. Современные проблемы математики/Математический институт им. В.А.Стеклова РАН (МИАН). Москва: МИАН, 2008. Вып. 11: Конференция «Леонард Эйлер и современная математика» (МИАН, 17 мая 2007 года). Сборник докладов, стр. 27-28.
4. Перфильев М.С. Некоторые закономерности гипотезы Римана/Математика, ее приложения и математическое образование (МПМО17): Материалы VI Международной конференции. Улан-Удэ: Изд-во ВСГУТУ, 2017, стр. 295-300.
5. <https://mathworld.wolfram.com/RiemannHypothesis.html>
6. Timothy Trudgian (February 2016). "Updating the error term in the prime number theorem"//Ramanujan Journal. 39 (2): 225–234.
7. Перфильев М.С. Оценка средних интервалов между простыми числами//Евразийский Союз Ученых. Серия: технические и физико-математические науки. №10(125)/2024 Том 1, стр. 3-8.
8. Г. Диамонд. Элементарные методы в изучении распределения простых

чисел//Успехи математических наук, 1990, том 45, выпуск 2, стр. 79-114.

9. <https://mathworld.wolfram.com/Euler-MascheroniConstant.html>

10. <https://mathworld.wolfram.com/BertrandsPostulate.html>

11. Nagura, J (1952), "On the interval containing at least one prime number", Proceedings of the Japan Academy, Series A, 28 (4): 177–181.

12. Lowell Schoenfeld (April 1976), "Sharper Bounds for the Chebyshev Functions  $\theta(x)$  and  $\psi(x)$ , II", Mathematics of Computation, 30 (134): 337–360.

13. Dusart, Pierre (2016), "Explicit estimates of some functions over primes", The Ramanujan Journal, 45: 227–251.

14. Dudek, Adrian W. (21 August 2014), "On the Riemann hypothesis and the difference between primes", International Journal of Number Theory, 11 (3): 771–778.

15. Baker, R. C.; Harman, G.; Pintz, J. (2001), "The difference between consecutive primes, II", Proceedings of the London Mathematical Society, 83 (3): 532–562.

16. Rosser, J. Barkley; Schoenfeld, Lowell (1962). "Approximate formulas for some functions of prime numbers". Illinois J. Math. 6: 64–94.

17. Dusart, Pierre (January 1999). "The  $k$ th prime is greater than  $k(\ln k + \ln \ln k - 1)$  for  $k \geq 2$ ". Mathematics of Computation. 68 (225): 411-415.

18. Rosser, Barkley(January 1941). "Explicit bounds for some functions of prime numbers". American Journal of Mathematics. 63(1): 211–232.

19. Г. Б. Двайт. Таблицы интегралов и другие математические формулы.

Москва: издательство «НАУКА», Главная редакция физико-математической литературы, 1977, стр. 124.

20. Ю. В. Матиясевич. Алан Тьюринг и теория чисел// Математика в высшем образовании.-2012.-№10.- С. 111-134.

21. <https://mathworld.wolfram.com/BrocardsProblem.html>

22. <https://mathworld.wolfram.com/BrownNumbers.html>

23. Bruce C. Berndt, William F. Galway. The Brocard-Ramanujan diophantine equation  $n! + 1 = m^2$ // The Ramanujan Journal.-2000.-Т. 4.-с. 41-42.

24. <https://mathworld.wolfram.com/abcConjecture.html>

25. A. Dabrowski. On the Diophantine Equation  $x! + A = y^2$ // Nieuw Arch. Wisk.-1996.-Т. 14.- С. 321-324.
26. Florian Luca. The diophantine equation  $P(x) = n!$  and a result of M. Overholt// Glasnik Matematički.-2002.-Т. 37, вып. 57.-С. 269-273.
27. Perfileev Michael. Consideration on Brocard's problem/Practice Oriented Science: UAE-Russia-India, Materials of International University Scientific Forum, UAE, June 5, 2024, Part 2, pp. 200-204.
28. [https://problems.ru/view\\_problem\\_details\\_new.php?id=76483](https://problems.ru/view_problem_details_new.php?id=76483)
29. Деза Е. Специальные числа натурального ряда: Учебное пособие. Москва: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011, стр.13-65.
30. <https://oeis.org/A000217>
31. Деза Е., Деза М. Фигурные числа. Москва: издательство МЦНМО, 2016, стр. 12-25.
32. Нестеренко Ю.В. Теория чисел. Москва: издательский центр «Академия», 2008, стр. 42-43.
33. Kourbatov, A. On the  $n$ th record gap between primes in an arithmetic progression// Int. Math. Forum: journal.-2018.-Vol. 13, no. 2.-P. 65-78.
34. <https://oeis.org/A005250>
35. <https://www.wolframalpha.com/input?i=prime+triplet>
36. Алфутова Н.Б., Устинов А.В. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. Москва: МЦНМО, 2002, С. 28.
37. <https://mathworld.wolfram.com/Hardy-RamanujanTheorem.html>
38. Paul Erdős, Mark Кас. The Gaussian Law of Errors in the Theory of Additive Number Theoretic Functions//American Journal of Mathematics.-1940.-Т. 62, № 1/4.-С. 738-742.
39. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам. Москва: АЙРИС-пресс, 2020, стр. 96-103.
40. <https://planetmath.org/StirlingsApproximation>
41. Гредасова Н.В., Желонкина Н.И., Корешникова М.А., Полищук Е.Г., Андреева И.Ю. Ряды: учебное пособие. Екатеринбург: Издательство Уральского

Университета, 2016, стр. 13-15.

42. Кохась К.П. Сумма обратных квадратов//Математическое просвещение.-  
2004.-Вып. 8.-С. 142–163.

43. Steven R.Finch. Mathematical Constants. Cambridge University Press,  
2003, pp. 12-15.